

# Un théorème de point fixe pour les endomorphismes de l'espace projectif avec des applications aux feuilletages algébriques

Adolfo Guillot

**Résumé.** On construit des relations algébriques qui lient les multiplicateurs des points fixes des endomorphismes de l'espace projectif sur un corps algébriquement clos. Ces relations généralisent celles qui sont obtenues via le Théorème holomorphe de point fixe de Lefchetz dans le cas complexe. En exploitant l'isomorphie de certains espaces de représentation on obtient, comme corollaire de ce résultat, un théorème ressemblant à celui de Baum-Bott pour les feuilletages algébriques et les champs de vecteurs homogènes.

**Mots-clés:** Théorème de point fixe, Indice de Baum-Bott, feuilletage holomorphe.

**Abstract.** We exhibit algebraic relationships between the multipliers of the fixed points of an endomorphism of projective space over an algebraically closed field that generalize those that can be obtained by applying the Holomorphic Lefchetz Fixed-point Theorem in the complex case. By exploiting the isomorphism between some representation spaces, we obtain analogues of Baum-Bott's theorem concerning algebraic foliations and homogenous vector fields.

**Keywords:** Fixed-point theorem, Baum-Bott index, holomorphic foliation.

**Mathematical subject classification:** 58C30, 58C10, 57R25, 57R30.

## 1 Introduction

Dans la plupart des situations géométriques, on considère comme équivalents deux endomorphismes de  $\mathbb{CP}^n$  qui ne diffèrent que par un changement linéaire de coordonnées. Pour distinguer deux classes on considère des invariants qui sont constants sur des classes d'équivalence. Un tel invariant est le nombre de points fixes d'un endomorphisme: deux endomorphismes ne peuvent être

---

Received 8 September 2003.

équivalents que s'ils ont le même nombre de points fixes. Cet invariant est très grossier, mais il peut être raffiné en prenant non seulement le nombre de points fixes d'un endomorphisme mais également les valeurs propres de sa dérivée sur chacun d'entre eux. Ainsi, il faut que deux endomorphismes de  $\mathbb{CP}^n$  aient le même nombre de points fixes et que les dérivées respectives aient les mêmes valeurs propres pour que l'on puisse obtenir l'un de l'autre par un changement linéaire de coordonnées. Vient ensuite naturellement la question de savoir, pour un endomorphisme de  $\mathbb{CP}^n$  ayant  $q$  points fixes (disons, isolés et simples), quelles sont les valeurs propres des dérivées aux points fixes qui sont réalisables. Un résultat dans cette direction est donné par le théorème suivant, valable sur toute variété complexe compacte:

**Théorème 1 (Théorème holomorphe de point fixe de Lefchetz).** *Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension  $n$  et  $f : M \rightarrow M$  une application holomorphe dont les points fixes sont simples et isolés. Pour  $x$ , point fixe de  $f$ , notons  $f_*|_x$  la dérivée de  $f$  en  $x$ . Alors,*

$$\sum_{f(x)=x} \frac{1}{\det(f_*|_x - Id)} = (-1)^n L(f, \mathcal{O}) \quad (1)$$

où  $L(f, \mathcal{O})$  est le nombre holomorphe de Lefchetz de  $f$ , qui ne dépend que de l'action de  $f$  sur la cohomologie de Dolbeault de  $M$ .

Le lecteur pourra trouver la définition de  $L(f, \mathcal{O})$  ainsi qu'une preuve de ce théorème dans [7]. On ne s'intéressera pas à l'aspect « homologique » du théorème, incarné par le membre droit de l'égalité ci-dessus, mais plutôt à un aspect « numérique » : le membre droit de l'expression ci-dessus peut être calculé explicitement et, pour une application  $f : \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$  satisfaisant les hypothèses précédentes,  $L(f, \mathcal{O}) = (-1)^n$  (voir [7]). En faisant cette substitution dans la formule (1) on obtient une relation algébrique qui lie les valeurs propres des dérivées aux points fixes d'un endomorphisme de  $\mathbb{CP}^n$  et donc une première obstruction pour qu'une collection de nombres complexes puisse être réalisé comme celle des valeurs propres d'un endomorphisme de  $\mathbb{CP}^n$ . Y a-t-il d'autres relations? Quelles formes ont-elles? Y a-t-il des résultats analogues sur d'autres corps? Le but de cet article est de donner une réponse partielle à ces questions à travers le

**Théorème 2.** *Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ . Soit  $B$  un polynôme sur l'espace des transformations linéaires, invariant par conjugaison et homogène de degré  $d_B \leq n$ . Soit  $f : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^n$  une fonction rationnelle de*

degré algébrique  $d \geq 2$  avec  $(d, p) = 1$  (dans le cas où  $p \neq 0$ ), définie en tout point et dont les points fixes sont isolés et simples. Alors, l'expression

$$\sum_{f(x)=x} \frac{B(f_*|_x - Id)}{\det(f_*|_x - Id)} \quad (2)$$

est dans  $k$  et ne dépend que du polynôme  $B$  et des entiers  $n$  et  $d$ .

Lorsque  $k = \mathbb{C}$  et  $B \equiv 1$ , ce résultat est un corollaire du théorème de Lefchetz. On verra que les relations que ce théorème fournit ne représentent malheureusement qu'une très petite partie de l'ensemble des relations qui existent parmi les valeurs propres de la dérivée aux points fixes d'un endomorphisme de  $\mathbb{P}^n$ .

La preuve de ce théorème sera faite dans la troisième section. Pour celle-ci, on considère le membre gauche de l'expression (2) comme une fonction rationnelle définie dans la variété des endomorphismes de  $\mathbb{P}^n$  de degré algébrique  $d$  (donnés par des polynômes homogènes de degré  $d$ ), qui est une variété quasiprojective, et l'on considère l'extension de cette fonction à un espace projectif. Cette fonction rationnelle est invariante sous l'action de  $\mathrm{PGL}_{n+1}$  induite par l'action naturelle sur  $\mathbb{P}^n$ . On prouve que cette fonction ne peut avoir de pôles que sur deux sous-variétés de codimension 1, à savoir, celle des endomorphismes ayant des points d'indétermination et celle des endomorphismes ayant des points fixes multiples. En étudiant le comportement de cette fonction au voisinage de ces deux sous-variétés on constate qu'elle n'a pas de pôles et que cette fonction rationnelle est donc constante, ce qui entraîne le Théorème 2.

Un autre façon d'aborder ce résultat est la suivante. Les fonctions symétriques des valeurs propres des dérivées aux points fixes d'un endomorphisme de  $\mathbb{P}^n$  donnent des fonctions rationnelles sur la variété des endomorphismes de  $\mathbb{P}^n$  qui sont invariantes sous l'action de  $\mathrm{PGL}_{n+1}$ . Ces fonctions engendrent un corps de fonctions rationnelles qui s'avère ne pas être librement engendré: il existe des relations parmi les générateurs. Le Théorème 2 en explicite quelques unes. Vu comme ça, ce théorème concerne plus la théorie des invariants de certaines représentations de  $\mathrm{GL}_n$ . Ces représentations sont aussi celles données par l'action de  $\mathrm{GL}_n$  sur l'espace des champs de vecteurs homogènes. On profitera de ce fait pour donner des formules qui seront au Théorème de Baum-Bott sur les points singuliers des champs de vecteurs holomorphes ce que le Théorème 2 est au Théorème de Lefchetz.

Les résultats que l'on présente ici sont apparus, sous une forme moins générale, dans la thèse de l'auteur [8], qui remercie Étienne Ghys pour sa générosité et son encouragement constant. Il remercie Bertrand Deroin pour ses remarques sur ce texte.

## 2 Définitions

Soit  $k$  un corps algébriquement clos de caractéristique  $p$ . Soit  $V_{n,d}$  l'espace vectoriel des applications polynomiales, homogènes de degré  $d$ , de  $k^n$  sur  $k^n$ . On fera toujours l'hypothèse  $d \neq 0 \pmod{p}$ , si  $p \neq 0$ . Un élément  $f \in V_{n,d}$  de la forme

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (P_1(z_1, \dots, z_n), \dots, P_n(z_1, \dots, z_n))$$

sera simplement noté  $(P_1, \dots, P_n)$ . Pour tout  $i$ ,  $P_i$  est un polynôme homogène de degré  $d$ . La dimension de  $V_{n,d}$  est  $n \binom{n+d-1}{d}$ . Un élément  $f \in V_{n,d}$  induit naturellement une fonction rationnelle  $f_{\mathbb{P}} : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  donnée par  $[P_1 : \dots : P_n]$ . L'espace  $V_{n,d}$  est naturellement muni d'une action de  $\mathrm{GL}_n$ , induite par l'action linéaire de ce groupe sur  $k^n$ . En tant qu'espace de représentation de ce dernier, il est isomorphe à

$$\mathrm{Sym}^d W^* \otimes W, \quad (3)$$

où  $W$  est la représentation standard de  $\mathrm{GL}_n$  sur  $k^n$ . Cette représentation n'est pas irréductible, car les transformations pour lesquelles il existe un polynôme  $Q$  de degré  $d-1$  tel que  $P_i = z_i Q$  forment un sous-espace de  $V_{n,d}$  de dimension  $\binom{n+d-2}{d-1}$  qui est invariant sous l'action de  $\mathrm{GL}_n$ . Cet espace —qu'on appellera le *sous-espace de multiples de l'identité*— a un supplémentaire stable, en vertu de la semisimplicité de  $\mathrm{GL}_n$  [4, Appendice C]. Ce supplémentaire sera noté  $V_{n,d}^0$ . Si  $p$  ne divise pas  $n+d-1$ , il s'identifie au noyau de la contraction équivariante

$$\begin{aligned} \nabla : \mathrm{Sym}^d W^* \otimes W &\longrightarrow \mathrm{Sym}^{d-1} W^*, \\ \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_d \otimes v &\mapsto \sum_i \langle \ell_i, v \rangle \ell_1 \ell_2 \cdots \widehat{\ell_i} \cdots \ell_d, \end{aligned} \quad (4)$$

car on a

$$\nabla \left( \sum_i z_i Q \otimes e_i \right) = (n+d-1) Q.$$

Les directions propres jouent un rôle fondamental dans ce qui suit:

**Définition 3.** Soit  $f \in V_{n,d}$ ,  $v \in k^n$ ,  $v \neq 0$ . La direction  $[v] \in \mathbb{P}^{n-1}$  est une *direction propre* de  $f$  si  $f(v) \wedge v = 0$ . Elle est *dégénérée* si  $f(v) = 0$ .

Les directions propres non-dégénérées de  $f$  donnent des points fixes pour  $f_{\mathbb{P}}$ ; les dégénérées, des points d'indétermination.

**Proposition 4.** Une fonction  $f \in V_{n,d}$  a génériquement  $(d^n - 1)/(d - 1)$  directions propres non-dégénérées.

**Preuve.** Soit  $f = (P_1, \dots, P_n)$ . Considérons la variété de  $\mathbb{P}^n$  définie par les polynômes homogènes de degré  $d$

$$P_i(z_1, \dots, z_n) - z_0^{d-1}z_i,$$

pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ . À l'exception du point  $[1 : 0 : \dots : 0]$ , tout point de cette variété provient d'une direction propre. Chaque direction propre donne  $d - 1$  points de cette variété. De cette sorte, si les directions propres d'un  $f \in V_{n,d}$  sont simples et isolées, elles sont en nombre de  $(d^n - 1)/(d - 1)$ . Pour prouver que ceci est générique, il suffit de donner un élément de  $V_{n,d}$  où ceci arrive. La transformation  $J_{n,d} \in V_{n,d}$  de l'Exemple 8 fournira cet élément.  $\square$

Les directions propres d'une transformation  $f \in V_{n,d}$  ne dépendent que de la projection de  $f$  dans  $V_{n,d}^0$ . Les directions propres d'un  $f \in V_{n,d}$  peuvent former une sous-variété de dimension plus grande que 0, comme pour les applications de la forme

$$(Q_1 + z_1 R, Q_2 + z_2 R, \dots, Q_n + z_n R),$$

qui ont comme lieu de directions propres la sous-variété de  $\mathbb{P}^{n-1}$  donnée par

$$\cap_i \{Q_i = 0\}.$$

Cependant, la sous-variété de  $V_{n,d}$  des applications qui ont une sous-variété de directions propres de dimension plus grande que 0 est de codimension supérieure à 1, car elle est une sous-variété propre de la variété des endomorphismes ayant des points d'indétermination.

Soit  $Z_{n,d}$  la variété des éléments de  $V_{n,d}$  avec une direction propre pointé, c'est-à-dire,  $Z_{n,d} \subset \mathbb{P}V_{n,d} \times \mathbb{P}^{n-1}$  est la variété algébrique donnée par

$$\{([f], [v]) \in \mathbb{P}V_{n,d} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid f(v) \wedge v = 0\}.$$

Du fait qu'elle est invariante sous l'action naturelle de  $\mathrm{PGL}_n$  sur  $\mathbb{P}V_{n,d} \times \mathbb{P}^{n-1}$ , elle est munie d'une action de ce groupe. On défini d'abord une fonction rationnelle **Spectre\*** :  $Z_{n,d} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  donnée par les coefficients du polynôme caractéristique de la dérivée de  $f_{|\mathbb{P}}$  (l'endomorphisme de  $\mathbb{P}^{n-1}$  induit par  $f$ ) au point fixe  $[v]$ . Soit  $([f], [v]) \in Z_{n,d}$ . Considérons la dérivée de  $f$  en  $v$ , l'application linéaire donnée par la matrice

$$(f_*|_v)_{ij} = \left. \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right|_v.$$

Puisque  $f(v) \wedge v = 0$ , le vecteur  $v$  est un vecteur propre de  $f_*|_v$ . Soit  $\mu d$  la valeur propre associée. Le polynôme caractéristique de  $f_*|_v$  a  $\mu d$  comme racine. On a donc

$$\frac{\det(xId - f_*|_v)}{x - \mu d} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i,$$

pour un certain  $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in k^{n-1}$  ( $b_{n-1} = 1$ ). On définit alors la fonction  $\text{Spectre}^* : Z_{n,d} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  par la formule

$$\text{Spectre}^*([f], [v]) = [b_0 : \mu b_1 : \dots : \mu^{n-2} b_{n-2} : \mu^{n-1}]. \quad (5)$$

Elle est bien définie, car elle ne dépend pas de  $(f, v)$  mais de  $([f], [v])$ . Elle définit une fonction rationnelle qui est invariante sous l'action de  $\text{PGL}_n$ . Si  $v$  est une direction propre non dégénérée de  $f$  alors  $\mu \neq 0$  et si  $\text{Spectre}^*([f], [v]) = [b_0 : b_1 : \dots : b_{n-2} : 1]$ , les valeurs propres de la dérivée de  $f_{\mathbb{P}}$  au point fixe  $[v]$  seront les racines du polynôme  $\sum b_i x^i$ . On notera  $[f_*|_v]$  la dérivée de  $f_{\mathbb{P}}$  au point fixe  $[v]$  et, suivant l'usage, on l'appellera le *multiplicateur* de  $f_{\mathbb{P}}$  en  $[v]$ .

Par la suite, on ne considérera  $[f_*|_v]$  mais plutôt  $[f_*|_v] - Id$ , qui est, d'après le lemme suivant, mieux adapté à la structure de  $V_{n,d}$  en tant qu'espace de représentation.

**Lemme 5.** *Soit  $f \in V_{n,d}$ ,  $v$  une direction propre de  $f$  et  $Q$  un polynôme de degré  $d-1$ . Les transformations  $[f_*|_v] - Id$  et  $[(f + QId)_*|_v] - Id$  ne diffèrent que par une homothétie.*

**Preuve.** Soit  $f = (P_1, \dots, P_n)$ . Les directions propres de  $f$  et  $f + QId$  coïncident (généralement). Supposons que l'on ait dans  $v = (1, 0, \dots, 0)$  une direction de  $f$  qui n'est pas dégénérée ni pour  $f$  ni pour  $f + QId$ . Supposons que  $f$  fixe  $v$ , de sorte que  $Q(v) \neq -1$ . On a

$$\left. \frac{\partial(P_i + Qz_i)}{\partial z_j} \right|_v = \left. \frac{\partial P_i}{\partial z_j} \right|_v + \delta_{1i} \left. \frac{\partial Q}{\partial z_j} \right|_v + \delta_{ij} Q(v).$$

De cette sorte, la matrice  $\left. \frac{\partial(P_i + Qz_i)}{\partial z_j} \right|_v$  est donnée par

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} d & * \\ 0 & [f_*|_v] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial Q}{\partial z_1} \right|_v & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q|_v & * \\ 0 & Q|_v Id \end{pmatrix} \\ & = (1 + Q|_v) \begin{pmatrix} d & * \\ 0 & \frac{[f_*|_v] - Id}{1 + Q|_v} + Id \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation  $\left. \frac{\partial Q}{\partial z_1} \right|_v = (d-1)Q|_v$ , conséquence de la relation d'Euler. Ceci prouve le lemme.  $\square$

Soit  $q(n, d) = (d^n - 1)/(d - 1)$ , le nombre de directions propres d'un élément générique de  $V_{n,d}$ . On a une application  $\rho : Z_{n,d} \rightarrow \mathbb{P}V_{n,d}$ , définie par projection sur le premier facteur, qui est équivariante par rapport à l'action de  $\mathrm{PGL}_n$ . On peut, à partir de **Spectre\*** et de  $\rho$ , définir l'application

$$\text{Spectre} : \mathbb{P}V_{n,d} \dashrightarrow \mathrm{Sym}^{q(n,d)}\mathbb{P}^{n-1}$$

en prenant les valeurs propres des directions propres d'un point du domaine. Cette fonction fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}V_{n,d} & \xrightarrow{\text{Spectre}} & \mathrm{Sym}^{q(n,d)}\mathbb{P}^{n-1} \\ \rho^{-1} \downarrow & & \downarrow \Pi \\ Z_{n,d} & \xrightarrow{\text{Spectre}^*} & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

dans des ouverts de Zariski convenables. Elle est invariante sous l'action de  $\mathrm{PGL}_n$  sur  $\mathbb{P}V_{n,d}$ .

**Remarque 6.** Un analogue de la fonction rationnelle **Spectre** apparaît dans un article de Gómez-Mont et Luengo [5] dans le contexte des feuilletages holomorphes de surfaces complexes. On reviendra sur ce point dans les deux dernières sections.

L'adhérence de l'image de **Spectre** donne la variété des valeurs propres « admissibles », celles qui sont génériquement réalisables par un  $f \in V_{n,d}$ . Puisque l'application **Spectre** est équivariante par rapport à l'action de  $\mathrm{PGL}_n$ , la propriété universelle du quotient  $\mathbb{P}V_{n,d}/\mathrm{PGL}_n$  de la théorie géométrique des invariants [10] garantit l'existence d'un morphisme

$$\widetilde{\text{Spectre}} : (\mathbb{P}V_{n,d}/\mathrm{PGL}_n) \dashrightarrow \overline{\text{Spectre}(\mathbb{P}V_{n,d})}$$

qui satisfait la relation  $\text{Spectre} \circ \pi = \widetilde{\text{Spectre}}$  par rapport au quotient  $\pi : \mathbb{P}V_{n,d} \dashrightarrow (\mathbb{P}V_{n,d}/\mathrm{PGL}_n)$ . Plus la dimension de la variété  $\overline{\text{Spectre}(\mathbb{P}V_{n,d})}$  est grande, plus le sous-corps du corps des invariants de  $\mathbb{P}V_{n,d}$  engendré par les fonctions symétriques des multiplicateurs sera riche. On avance la conjecture suivante:

**Conjecture 7.** Pour  $d \geq 2$  et  $n \geq 3$  les variétés  $\overline{\text{Spectre}(\mathbb{P}V_{n,d})}$  et  $\mathbb{P}V_{n,d}/\mathrm{PGL}_n$  ont la même dimension.

On conjecture que les  $f \in V_{n,d}$  qui ont les mêmes valeurs propres forment, génériquement, un nombre fini d'orbites sous l'action de  $\mathrm{GL}_n$ . Cette conjecture est vraie dans le cas  $k = \mathbb{C}$ ,  $d = 2$  et  $n = 3$ , comme on l'a prouvé dans [8] en utilisant fortement le fait que dans  $V_{3,2}$  la variété de transformations  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  qui ont un hyperplan invariant est de codimension 1.

Calculons, en guise d'exemple, les directions propres et les multiplicateurs associés sur un cas particulier.

**Exemple 8.** Considérons la transformation  $J_{n,d} \in V_{n,d}$  donnée par

$$J_{n,d} = (z_n^d, z_1^d, z_2^d, \dots, z_{n-1}^d).$$

Soit  $\omega$  une racine primitive de l'unité d'ordre  $d^n - 1$ . Le sous-groupe de  $\mathrm{PGL}_n$  d'ordre  $q(n, d)$  engendré par le changement de coordonnées diagonale  $z_i \mapsto \omega^{d^{(i-1)}} z_i$  agit sur  $\mathbb{P}^{n-1}$  en permutant l'ensemble des directions propres de  $J$ . La fonction  $J$  a une direction propre non-dégénérée dans la direction  $[1 : \dots : 1]$  et le stabilisateur de cette dernière, sous l'action du groupe, est trivial: cette transformation a donc  $q(n, d)$  directions propres non-dégénérées et le groupe agit transitivement sur leur ensemble. De cette sorte,  $\mathrm{Spectre}([J], [\cdot])$  ne dépend pas de la direction propre en considération: il suffit de connaître sa valeur sur l'une d'entre elles pour la connaître sur toutes. Pour la direction  $w = (1, \dots, 1)$ , on a  $\mu = 1$  et donc,

$$\frac{\det(xId - J_*|_w)}{(x - \mu d)} = \frac{x^n - d^n}{x - d} = \sum_{i=0}^{n-1} d^{n-1-i} x^i.$$

Les valeurs propres de la dérivée de  $J_{\mathbb{P}}$  au point fixe  $[w]$  sont donc les racines de ce dernier polynôme; celles de  $[J_*|_w] - Id$ , les racines de  $\sum_{i=0}^{n-1} d^{n-1-i} (x + 1)^i$ .

### 3 Preuve du théorème

Après ces définitions, on commence la preuve du Théorème 2. Soit  $B$  un polynôme homogène de degré  $d_B \leq n - 1$  comme dans les hypothèses du théorème. Ce polynôme défini une fonction rationnelle  $C_B^* : Z_{n,d} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  donnée par

$$\frac{B}{\det} \circ (\mathrm{Spectre}^* - Id).$$

On a une fonction rationnelle  $C_B : \mathbb{P}V_{n,d} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  qui est construite en prenant la somme de  $C_B^*$  sur les  $q(n, d)$  préimages de  $\rho$ , dans l'ouvert de  $\mathbb{P}V_{n,d}$  des points dont la préimage par  $\rho$  est de dimension zéro. Dans le complémentaire, qui est

de codimension supérieure ou égale à 2 dans  $\mathbb{P}V_{n,d}$ , la fonction s'étend naturellement. On va prouver que cette fonction rationnelle n'a pas de pôles, et qu'elle est donc constante, ce qui entraînera le Théorème 2. Les pôles de  $C_B$ , s'il y en a, se trouvent dans l'image par  $\rho$  des points de  $Z_{n,d}$  qui correspondent à des directions propres dégénérées (des points d'indétermination pour l'endomorphisme de l'espace projectif induit) ou bien des points fixes dont la dérivée a une valeur propre égale à 1. Dans tous les autres cas chacun des  $q(n, d)$  termes de la somme définissant  $C_B$  est dans  $k$ . Dans le premier cas, si  $([f], [v]) \in Z_{n,d}$  est une direction propre dégénérée alors, d'après la définition de Spectre\*, l'ordre du pôle de  $C_B^*$  est  $(n-1) - d_B$ , le degré du déterminant moins le degré de  $B$ . Ainsi, grâce à l'hypothèse faite sur le degré de  $B$ , les  $f \in V_{n,d}$  ayant des directions propres dégénérées ne contribuent pas aux pôles de  $C_B$ . Il faut donc chercher les pôles de  $C_B$  dans l'image par  $\rho$  des points de  $Z_{n,d}$  qui correspondent à des points fixes dont la dérivée a une valeur propre égale à 1. Ces points sont caractérisés par la

**Proposition 9.** *Soit  $f \in V_{n,d}$ . Soit  $[v]$  une direction propre non-dégénérée de  $f$ . La direction  $[v]$  est une direction propre de multiplicité plus grande que 1 si et seulement si 1 est une valeur propre de la dérivée de  $f$  en  $[v]$ .*

**Preuve.** Les directions propres sont données par l'intersection dans  $\mathbb{P}^{n-1}$  des hypersurfaces

$$\begin{vmatrix} P_i & z_i \\ P_j & z_j \end{vmatrix} = 0.$$

Si ces hypersurfaces s'intersectent au point  $v$  avec une multiplicité supérieure à 1 alors il existe une droite  $\ell$  qui passe par  $p$  et qui a un contact d'ordre supérieur ou égal à 2 avec chacune des hypersurfaces  $\{P_i z_j - P_j z_i = 0\}$ . Supposons, sans perte de généralité, que  $v = [1 : 0 : \dots : 0]$  et  $\ell = \cap_{i=3}^n \{z_i = 0\}$ . D'abord, le coefficient de  $z_1^d$  dans  $P_i$  est nul pour  $i \geq 2$ . Pour que l'hypersurface  $P_i z_j - P_j z_i$  aie un contact d'ordre au moins 2 avec la droite  $\ell$ , il faut que pour tout  $i, j$  avec  $i < j$ , on ait

$$\left( \frac{\partial P_i}{\partial z_2} + \delta_{j2} P_i - \frac{\partial P_j}{\partial z_2} - \delta_{i2} P_j \right) \Big|_v = 0.$$

Ces conditions se traduisent, pour  $i = 1, j \geq 3$ , par  $\partial P_j / \partial z_2 \Big|_v = 0$ : le coefficient de  $z_1^{d-1} z_2$  dans  $P_j$  est nul, pour  $i = 1, j \geq 3$ , par  $P_j \Big|_v = 0$ : le coefficient de  $z_1^d$  dans  $P_j$  est nul et finalement, pour  $i = 1, j = 2$ , par  $(P_1 - \partial P_2 / \partial z_2) \Big|_v = 0$ : les coefficients de  $z_1^{d-1} z_2$  dans  $P_2$  et de  $z_1^d$  dans  $P_1$  sont égaux. De cette façon,

$f_*|_v$  est donné par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} d\alpha & * & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

ce qui prouve la proposition.  $\square$

Une fois que l'on a caractérisé ces points, on prouve qu'ils ne contribuent pas aux pôles de  $C_B$ . Considérons un  $f_\varepsilon \in V_{n,d}$ ,  $f = (P_1, \dots, P_n)$ , tel que les directions  $v = [1 : 0 : \dots : 0]$  et  $w_\varepsilon = [1 : \varepsilon : 0 : \dots : 0]$ , pour  $\varepsilon \in k^*$ , soient des directions propres de  $f$ . On étudiera le comportement des valeurs propres de  $[f_*|_v]$  et  $[f_*|_w]$  en fonction de  $\varepsilon$ , spécialement lorsque  $\varepsilon = 0$ . Posons

$$P_i = \beta_i z_1^d + \sum_{j=1}^d a_j^i z_1^{d-j} z_2^j + \dots,$$

où les points dénotent des monômes qui ont un degré strictement inférieur à  $d$  dans variables  $z_1$  et  $z_2$ . Les  $2(n-1)$  conditions (linéaires) qu'il faut imposer pour que  $v$  et  $w_\varepsilon$  soient des directions propres de  $f$  sont  $\beta_i = 0$  pour  $i \geq 2$ , et les conditions

$$\varepsilon a_1^2 = - \sum_{i=2}^d a_i^2 \varepsilon^i + \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad \varepsilon a_1^j = - \sum_{i=2}^d a_i^j \varepsilon^i \quad (\text{pour } j \geq 3), \quad (6)$$

où  $\lambda$  est défini par l'équation

$$\frac{1}{\lambda} = 1 + a_1^1 \varepsilon + a_2^1 \varepsilon^2 + \dots + a_n^1 \varepsilon^n.$$

L'hypothèse (ouverte) sur la non-dégénérence de  $v$  comme direction propre de  $f$  se traduit par  $\beta_1 \neq 0$ . On supposera, sans perte de généralité, que  $\beta_1 = 1$ . Avec ces normalisations, on trouve que  $v$  est un vecteur propre de  $f_*|_v$  de valeur propre  $d$  et  $w_\varepsilon$  est un vecteur propre de  $f_*|_w$  valeur propre  $d/\lambda$ . La transformation linéaire  $f_*|_v + \lambda f_*|_w$  est donnée par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} d(\lambda + 1) + \sum_{j=1}^d (d-j)a_j^1 \varepsilon^j & a_1^1 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^d j a_j^1 \varepsilon^j & * & \dots & * \\ \sum_{j=1}^d (d-j)a_j^2 \varepsilon^j & a_1^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^d j a_j^2 \varepsilon^j & * & \dots & * \\ \sum_{j=1}^d (d-j)a_j^3 \varepsilon^j & a_1^3 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^d j a_j^3 \varepsilon^j & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^d (d-j)a_j^n \varepsilon^j & a_1^n + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^d j a_j^n \varepsilon^j & * & \dots & * \end{pmatrix} \quad (7)$$

En utilisant les relations (6) et la relation  $a_1^1 = \frac{1}{\lambda} - 1 - \sum_{i=2}^d a_i^1 \varepsilon^i$ , et en posant

$$\sigma_j = - \sum_{i=2}^d [(\lambda - 1)(d - i) + \lambda(i - 2)(d - 1)] a_i^j \varepsilon^i,$$

on trouve que le produit de la matrice (7) par le vecteur

$$y = \left( \frac{1}{\lambda} - 1, -\varepsilon(d - 1), 0, \dots, 0 \right)$$

est le vecteur

$$(\sigma_1 + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) [(\lambda - 1)(d - 2) + 2], \sigma_2 - 2(d - 1), \sigma_3, \dots, \sigma_n).$$

D'autre part, le produit de (7) avec le vecteur  $v$  est, si l'on pose

$$\gamma_j = \lambda \sum_{i=2}^d (d - i) a_i^j \varepsilon^i,$$

$$(\gamma_1 + (\lambda - 1) + 2d, \gamma_2 + \varepsilon(d - 1), \gamma_3, \dots, \gamma_n).$$

De la sorte, l'image du vecteur

$$u = \frac{1}{\varepsilon} y + \frac{(a_1^1)^2(d - 2)}{2d} \varepsilon v$$

sous la transformation  $(f_*|_v - Id) + (\lambda f_*|_w - Id)$  est le produit de  $\varepsilon^2$  avec un vecteur qui est, quand  $\varepsilon = 0$ , un vecteur fini et non-nul. Le vecteur  $\frac{1}{\varepsilon} y$  est, quand  $\varepsilon = 0$ , le vecteur  $u_0 = (a_1^1, -(d - 1), 0, \dots, 0)$ , qui est le vecteur propre associé à la valeur propre nulle de la dérivée de  $f_0$  sur sa direction propre double  $[1 : 0 : \dots : 0]$ .

Notons  $B_v(\varepsilon)$  l'expression  $B([f_*|_v] - Id)$  et considérons les expressions analogues  $B_w$ ,  $\det_v$ ,  $\det_w$ . Les deux dernières prennent la valeur zéro sur  $\varepsilon = 0$ . Il existe donc une constante  $c_v$  telle que  $\det_v = c_v \varepsilon + \varepsilon^2 g_v$  où  $g_v$  est une fonction régulière en  $\varepsilon = 0$  (idem pour  $w$ ). Le comportement de  $u$  sous  $(f_*|_v - Id) + (\lambda f_*|_v - Id)$  nous donne  $c_v + c_w = 0$ . Soit  $g_B$  la fonction  $(B_v - B_w)/\varepsilon$ . Elle n'a pas de pôles sur  $\varepsilon = 0$ . Alors,

$$\begin{aligned} \frac{B_v}{\det_v} + \frac{B_w}{\det_w} &= \frac{\det_w B_v + \det_v (B_v - \varepsilon g_B)}{\det_v \det_w} \\ &= B_v \frac{\varepsilon^2 (g_v + g_w)}{\det_v \det_w} - \frac{\varepsilon g_B}{\det_w}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression n'a pas de pôles sur  $\varepsilon = 0$  et donc le lieu de directions propres doubles dans  $Z_{n,d}$  ne contribue pas aux pôles de la fonction  $C_B : \mathbb{P}V_{n,d} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ , qui est donc constante.

Le point fixe double ainsi obtenu n'a rien de particulier et tout point fixe double apparaît à travers une telle déformation. Ceci prouve le Théorème 2.

On peut étendre sans difficultés ce théorème aux endomorphismes ayant des points d'indétermination, pourvu que ces points soient simples et isolés. Il suffit de remarquer que la formule (5) implique que la contribution locale

$$\frac{B(f_*|_x - \text{Id})}{\det(f_*|_x - \text{Id})}$$

(avec la notation du Théorème 2) est bien définie même quand un point fixe dégénère pour devenir un point d'indétermination. Cette contribution est nulle si  $d_B < n-1$ . Si  $d_B = (n-1)$ , elle peut être calculée soit en prenant la limite de la contribution locale lorsqu'un point fixe dégénère sur un point d'indétermination soit en perturbant l'endomorphisme par l'addition d'un multiple de l'identité (suivant le Lemme 5).

#### 4 Sur le nombre de relations

On peut calculer combien de relations, parmi celles qui définissent  $\overline{\text{Spectre}}(\mathbb{P}V_{n,d})$  dans  $\text{Sym}^q \mathbb{P}^{n-1}$ , sont données par le Théorème 2. Ce nombre ne dépend que de l'entier  $n$ . On a autant de relations algébriquement indépendantes que de polynômes sur l'espace de transformations linéaires, homogènes et invariants, de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . Si l'on note  $\mathcal{P}(m)$  la fonction de partition d'Euler (les façons de décomposer  $m$  comme une somme d'entiers positifs), alors le nombre de relations algébriquement indépendantes est  $\mathcal{P}(n-1) + \dots + \mathcal{P}(1) + \mathcal{P}(0) - 1$  (on ne compte pas le déterminant). On voit, dans la première colonne du Tableau 1, la dimension de  $V_{n,d}$ , le nombre de valeurs propres issues d'un  $f \in V_{n,d}$  générique et le nombre de relations parmi ces valeurs propres que l'on a construit. Les deux colonnes suivantes donnent l'ordre de croissance de ces mêmes quantités lorsque l'on fixe l'un des paramètres et l'on fait croître l'autre. On utilise, dans ces estimations,

$$\mathcal{P}(m) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}m} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2m}{3}}\right)$$

[9, section 328]. Dans ces deux cas, on voit que le nombre de valeurs propres

Tableau 1: Les paramètres

.	croissance à $n$ fixe	croissance à $d$ fixe
dimension de $V_{n,d}$ $n \frac{(n+d-1)!}{d!(n-1)!}$	$\sim \frac{n}{(n-1)!} d^{n-1}$	$\sim \frac{1}{d!} n^{d+1}$
nombre générique de valeurs propres $(n-1) \frac{d^n - 1}{d-1}$	$\sim n d^{n-1}$	$\sim n d^{n-1}$
nombre de relations $\sum_{i=1}^{n-1} P(i)$	$\sum_{i=1}^{n-1} P(i)$	pas plus grand que $\frac{1}{4\sqrt{3}} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$

dépasse (largement pour la troisième colonne) la dimension de  $V_{n,d}$ . D'autre part, le nombre de relations parmi les valeurs propres est, au moins

$$(\text{nombre de valeurs propres}) - \dim(V_{n,d}) + \dim(\text{GL}_n).$$

De ce fait, le nombre de relations qui existe parmi les valeurs propres doit croître —dans les deux cas en considération— comme le nombre de valeurs propres. Les relations fournies par le Théorème 2 (dont le nombre figure dans la dernière ligne du tableau) ne représentent qu'une partie infime du nombre de relations existantes.

## 5 Champs de vecteurs homogènes et feilletages

Le Théorème 2 a, dans le cas  $k = \mathbb{C}$ , un corollaire qui concerne les champs de les feilletages par courbes de  $\mathbb{CP}^{n-1}$  (et, plus généralement, les champs de vecteurs homogènes sur  $\mathbb{C}^n$ ) qui est au théorème de Baum-Bott ce que le Théorème 2 est au théorème de Lefchetz. Le théorème de Baum-Bott lie la somme de certains indices définis dans les singularités d'un feuilletage holomorphes à une donnée holomologique:

**Théorème 10 (Baum-Bott [1]).** *Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  un feuilletage holomorphe par courbes de  $M$  avec des singularités simples et isolées. Soit  $B$  un polynôme invariant sur l'espace de transformations*

linéaires et homogène de degré  $n$ . Pour chaque singularité  $x$  du feuilletage, notons  $A_x$  la partie linéaire (du développement centré en  $x$ ) d'un champ de vecteurs tangent à  $\mathcal{F}$ . Alors,

$$\sum_{x \in \text{sing}(\mathcal{F})} \frac{B(A_x)}{\det(A_x)} = \int_M B\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right)$$

où  $\Theta$  est une matrice de courbure dans le fibré tangent holomorphe de  $M$ .

On donnera, à partir du Théorème 2, une formule analogue à cette dernière (toujours dans un esprit « numérique »). Le lecteur pourra consulter [6] pour des notions relatives aux feuilletages holomorphes et [2] pour des notions relatives aux différents types d'indices.

Les champs de vecteurs polynomiaux, homogènes de degré  $d$ , sur  $\mathbb{C}^n$  forment un espace vectoriel qui est muni d'une action de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  et qui est isomorphe, en tant qu'espace de représentation de ce dernier, à  $\text{Sym}^d(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n$ . On interprète dans ce contexte les définitions et résultats précédents. On identifie l'espace  $V_{n,d}$  à l'espace de champs de vecteurs homogènes de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}^n$ . L'élément  $f = (P_1, \dots, P_n)$  de  $V_{n,d}$  est identifié au champ  $X_f = \sum_{i=1}^n P_i(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Cette identification est équivariante et, avec elle, on traduit les notions introduites auparavant:

**Directions propres.** Les directions propres de  $f$  donnent, pour  $X_f$ , des *orbites radiales*, des droites, passant par l'origine, où  $X_f$  est colinéaire au *champ radial*  $R = \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ . Une direction propre dégénérée de  $f$  donne une orbite radiale dégénérée pour  $X_f$  au sens où le champ est identiquement nul sur elle.

**Contraction  $\nabla$ .** Cette contraction est, du point de vue des champs, la divergence par rapport à la forme volume  $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ . Les champs qui proviennent de  $V_{n,d}^0$  sont les champs isochores; son supplémentaire, celui des éléments de la forme  $QId$ , donne l'espace des multiples du champ radial, les champs de la forme  $Q \cdot R$ , où  $Q \in \text{Sym}^{d-1}(\mathbb{C}^n)^*$ .

**Multiplicateurs.** On associe à l'orbite radiale  $[v]$  du champ  $X_f$  une classe de conjugaison de  $\text{Hom}(\mathbb{C}^{n-1}, \mathbb{C}^{n-1})$ , qui sera introduite dans la Définition 11 mais qui s'avère être celle de  $([f_*|_v] - Id)$ . On l'appelle le *type linéaire de  $X_f$  transverse à  $[v]$* , nom qui sera justifié après l'interprétation géométrique qui suit.

Considérons un champ  $X$  sur  $\mathbb{C}^n$ , homogène de degré  $d$ . Il est singulier à l'origine. Notons  $\widetilde{\mathbb{C}^n}$  l'éclaté de  $\mathbb{C}^n$  en ce point et  $\widetilde{0}$  le transformé de l'origine

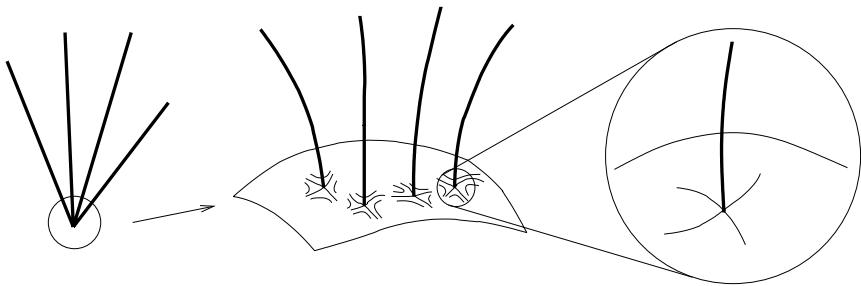


Figure 1: L'éclatement à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . L'éclaté du point donne un diviseur muni d'un feuilletage qui a un point singulier pour chaque orbite radiale.

sous cet éclatement. Le champ de vecteurs  $X$  devient, sur  $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ , un champ  $\tilde{X}$  qui s'annule à l'ordre  $d - 1$  tout au long de  $\widetilde{0}$ . Le feuilletage induit par  $X$ , noté  $\mathcal{F}_X$ , tangent à  $\widetilde{0}$ , a sur ce dernier un point singulier pour chaque droite radiale (voir la Figure 1). Soit  $[v]$  une orbite radiale non-dégénérée de  $X$ . Considérons une carte de l'éclaté avec des coordonnées  $(w_1, \dots, w_n)$  de sorte que  $\{w_1 = 0\}$  soit le diviseur  $\widetilde{0}$  et que l'origine des coordonnées soit le point où  $[v]$  coupe le diviseur. Considérons un champ de vecteurs tangent au feuilletage  $\mathcal{F}_X$ . Son développement de Taylor au voisinage de l'origine des coordonnées est de la forme

$$\alpha w_1 \frac{\partial}{\partial w_1} + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} w_j \frac{\partial}{\partial w_i} + \dots$$

avec  $\alpha \neq 0$ . Si l'on normalise le champ de sorte que  $\alpha = 1$  alors la classe de conjugaison du champ linéaire  $(n - 1)$ -dimensionnel

$$\sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij} w_j \frac{\partial}{\partial w_i}$$

est un invariant intrinsèquement associé au couple  $(X, v)$ .

**Définition 11.** La classe de conjugaison de  $\text{Hom}(\mathbb{C}^{n-1}, \mathbb{C}^{n-1})$  ainsi affecté à  $(X, v)$  est le type linéaire de  $X$  transverse à  $v$ .

Constatons qu'il s'agit, pour le champ  $X_f$  provenant de  $f \in V_{n,d}$  et  $[w]$  direction propre de  $f$ , de la classe de conjugaison de  $[f_*|_w] - Id$ . Soit  $X$  un champ homogène de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}^n$  ayant une orbite radiale non-dégénérée dans la direction du vecteur  $v = (1, 0, \dots, 0)$ . Alors, si  $X = \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ , le coefficient de  $z_1^d$  dans  $P_i$  est nul pour  $i \geq 2$  et on peut le supposer égal à 1 pour  $i = 1$ .

Soit  $a_{ij}$  le coefficient de  $z_1^{d-1} z_j$  dans  $P_i$ . Éclatons l'origine de  $\mathbb{C}^n$  en prenant les coordonnées  $w_1 = z_1$ ,  $w_i = z_i/z_1$  pour  $i \geq 2$ . Dans ces coordonnées, le champ  $\tilde{X}$  s'écrit, si l'on pose  $Q_i(w_1, w_2, \dots, w_n) = P_i(1, w_2, \dots, w_n) - w_i P_1(1, w_2, \dots, w_n)$ , comme

$$w_1^{d-1} \left[ w_1 P_1(1, w_2, \dots, w_n) \frac{\partial}{\partial w_1} + \sum_{i=2}^n Q_i \frac{\partial}{\partial w_i} \right].$$

Divisons ce dernier champ par  $w^{d-1}$ . Le champ qui en résulte est tangent à l'hypersurface  $w_1 = 0$ , l'éclaté de l'origine. Sur cette hypersurface, l'origine des coordonnées est une singularité du feuilletage. Puisque  $\partial(w_1 P_1)/\partial w_1|_v = 1$ ,  $\partial Q_i/\partial w_1|_v = 0$  et, pour  $j \geq 2$ ,

$$\left. \frac{\partial Q_i}{\partial w_j} \right|_v = \left. \frac{\partial P_i}{\partial w_j} \right|_v - \delta_{ij} \left. P_1 \right|_v - \left( w_i \left. \frac{\partial P_1}{\partial w_j} \right|_v \right) = a_{ij} - \delta_{ij},$$

le type linéaire de  $X$  transverse à cette orbite radiale est représenté par la matrice  $(a_{ij}) - Id$ : si l'on voit  $X$  comme provenant d'une transformation  $f \in V_{n,d}$  et  $[v]$  comme un point fixe de  $f_{\mathbb{P}} : \mathbb{CP}^{n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$  alors le type linéaire de  $X$  transverse à  $[v]$  est exactement la classe de  $[f_*|_v] - Id$ . On peut maintenant traduire le Théorème 2 pour obtenir le:

**Corollaire 12.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs homogène de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}^n$  avec une singularité isolée à l'origine et des orbites radiales simples et isolées  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{q(n,d)}$ . Notons  $A_i$  le type linéaire de  $X$  transverse à l'orbite radiale  $\xi_i$ . Soit  $B$  un polynôme homogène sur l'espace de transformations linéaires invariant par conjugaison et homogène de degré  $d_B \leq n - 1$ . Alors l'expression*

$$\sum_{i=1}^{q(n,d)} \frac{B(A_i)}{\det(A_i)}$$

*est dans  $\mathbb{C}$  et ne dépend que du couple  $(n, d)$  et du polynôme  $B$ .*

Lorsque le polynôme  $B$  est de degré  $n - 1$  alors, d'après le Lemme 5, l'indice associé à chaque orbite radiale du champ  $X$  reste inchangé si l'on ajoute au champ  $X$  un multiple du champ radial. D'autre part, le champ de vecteurs homogène  $X$  définit un feuilletage par courbes de  $\mathbb{CP}^{n-1}$ , où chaque courbe provient d'une courbe intégrale de  $X$  sous la projection standard  $\Pi : \mathbb{C}^n \dashrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ . Ce feuilletage coïncide avec celui d'un champ obtenu en ajoutant à  $X$  un multiple du champ radial. Il n'est pas difficile de voir que, dans ce cas, l'indice local associé à chaque orbite radiale de  $X$  par le dernier corollaire coïncide avec celui que le Théorème de Baum-Bott associe à la singularité correspondante du feuilletage de  $\mathbb{CP}^{n-1}$ .

**Remarque 13.** On peut aller directement d'une application polynomiale  $f \in V_{n,d}$ ,  $f : k^n \rightarrow k^n$ , à une *distribution de droites* (équivalente à un feuilletage dans le cas complexe) sans passer par les champs de vecteurs homogènes: à partir d'un  $f \in V_{n,d}$  on peut construire une fonction rationnelle  $\Phi : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \text{Gr}_2(n)$  à valeurs dans la grassmannienne des 2-plans de  $k^n$  qui se factorise à travers la variété d'incidence

$$\mathcal{I} = \{(v, \Pi) \in \mathbb{P}^{n-1} \times \text{Gr}_2(n) \mid v \in \Pi\}$$

et les projections sur les deux facteurs. Cette fonction rationnelle est donné par  $\Phi_f(v) = v \wedge f(v)$ . Les directions propres de  $f$  donnent de points d'indétermination de  $\Phi_f$ . Cette dernière ne dépend que de la projection de  $f$  dans  $\mathbb{P}V_{n,d}^0$ . Ceci permet d'étendre la définition et les résultats des indices de type Baum-Bott aux distributions de droites de l'espace projectif sur un corps algébriquement clos arbitraire.

**Exemple 14 (Comparer avec les Exemples 2-8 et 3-9 de [3]).** Calculons ces relations dans le cas le plus simple, celui des champs quadratiques homogènes de  $\mathbb{C}^3$ . Un tel champ a génériquement  $2^3 - 1 = 7$  orbites radiales  $\xi_1, \dots, \xi_7$ . Le type transverse de chacune d'entre elles a deux valeurs propres,  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ . On a les relations

$$\sum_{i=1}^7 \frac{(\lambda_i + \mu_i)^k}{\lambda_i \mu_i} = (-4)^k,$$

pour  $k \in \{0, 1, 2\}$ , car pour la transformation  $J_{3,2}$  (Exemple 8), on a

$$\sum_{i=0}^2 2^{2-i} (x+1)^i = x^2 + 4x + 7.$$

Ces trois relations peuvent s'obtenir par des théorèmes d'indice bien connus, comme Daniel Lehmann nous l'a fait savoir. On peut obtenir trois relations algébriquement équivalentes aux relations présentées dans l'Exemple 14 via l'application des théorèmes de Baum-Bott et Camacho-Sad [2] de la façon suivante:

- (1) Appliquer le théorème de Baum-Bott au feuilletage induit sur  $\mathbb{CP}^2$ .
- (2) Prolonger le champ de vecteurs dans un feuilletage de  $\mathbb{CP}^3$ , éclater l'origine des coordonnées et appliquer le théorème de Baum-Bott.
- (3) Appliquer le théorème de Camacho-Sad au feuilletage précédent relativement à l'éclaté de l'origine et au plan à l'infini.

On ignore si l'ensemble des relations fournies par le Corollaire 12 peut s'obtenir, en toute généralité, par ce genre de méthodes.

## Références

- [1] Paul F. Baum et Raoul Bott. On the zeroes of meromorphic vector fields. *Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)* Springer, New York, (1970), 29–47.
- [2] Marco Brunella. Some remarks on indices of holomorphic vector fields. *Publ. Mat.* **41**(2): (1997), 527–544.
- [3] Vincent Cavalier, Daniel Lehmann et Marcio Soares. *Espaces analytiques cohérents*. Prépublication, 2001.
- [4] William Fulton et Joseph Harris. *Representation theory*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.
- [5] Xavier Gómez-Mont et Ignacio Luengo. *The Bott polynomial of a holomorphic foliation by curves*. Actes du congrès Medina 95.
- [6] X. Gómez-Mont et L. Ortíz-Bobadilla. *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*. Sociedad Matemática Mexicana, México D.F., 1989.
- [7] Phillip Griffiths et Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [8] Adolfo Guillot. Champs quadratiques uniformisables. Thèse ÉNS-Lyon, 2001.
- [9] Kiyosi Itô (éditeur). Encyclopedic dictionary of mathematics. Second edition, translated from the third Japanese edition. MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1980.
- [10] D. Mumford, J. Fogarty et F. Kirwan. Geometric invariant theory. Third edition. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2)*, 34. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

## Adolfo Guillot

Instituto de Matemáticas UNAM, Unidad Cuernavaca  
 Av. Universidad s/n, col. Lomas de Chamilpa  
 C.P. 62210 Cuernavaca, Morelos  
 MEXIQUE

E-mail: adolfo@matcuer.unam.mx